Der Banachsche Fixpunktsatz

Pascal Hitzler

18. März 1998

Vorlesung auf dem Nachkurs zum Intensivkurs Mathematik Donaueschingen 1997, der vom 14. bis 21. März 1998 an der Universität Tübingen stattfand. Das vorliegende Skript ist als Gedächtnisstütze gedacht und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Die gestellten „Aufgaben" sind als Diskussionsgrundlagen zu verwenden.

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Vektorräume

Definition 1.1 (Gruppe) Sei G eine Menge und $\circ$ ein binäre Operator auf G, d.h. eine Funktion $G \times G \to G$. Dann heißt $(G, \circ)$ eine *kommutative* oder *abelsche Gruppe*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(G1) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (*Assoziativität*).

(G2) Es existiert $e \in G$ so daß für alle $a \in G$ gilt: $e \circ a = a \circ e = a$. e heißt das *neutrale Element* der Gruppe.

(G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Das Element a^{-1} heißt das zu a *inverse* Element.

(AB) Für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$ (*Kommutativität*).

Bezeichnet man die Operation in einer Gruppe mit $+$, dann nennt man diese *Addition*. Für jedes Element $a \in G$ wird dann dessen additives Inverses mit $-a$ bezeichnet. Man schreibt dann auch $a - b$ statt $a + (-b)$. Das neutrale Element wird in diesem Fall üblicherweise mit 0 bezeichnet.

Aufgabe 1 Zeige, daß jede Gruppe genau ein neutrales Element besitzt. Zeige, daß zu jedem Element a in einer Gruppe genau ein inverses Element existiert.

Aufgabe 2 Sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Gruppen?

Aufgabe 3 Für $p \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{K}_p$ die Menge $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, wobei p eine Primzahl sei. Beschreibe Operatoren auf $\mathbb{K}_p$ bzw. $\mathbb{K}_p \setminus \{0\}$, durch die diese Menge zu einer kommutativen Gruppe wird. Geht das auch, falls p keine Primzahl ist?

Aufgabe 4 Es bezeichne $\mathbf{C}[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen vom abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere eine Operation auf $\mathbf{C}[a, b]$, durch die diese Menge zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 5 Betrachte die Menge $\mathrm{M}(n, n)$ aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Ist diese eine (kommutative) Gruppe bezüglich Addition bzw. Multiplikation?

Definition 1.2 (Vektorraum) Sei V eine Menge und $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ zwei binäre Operatoren. Dann heißt V ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v, w \in V$ gilt $\lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$ (*Distributivität*).

(V3) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ (*Assoziativität*).

(V4) Für alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$.

Konventionen für Klammern werden von den reellen Zahlen übernommen.

Aufgabe 6 Mache $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$ und $\mathrm{M}(n, n)$ zu Vektorräumen.

Definition 1.3 (Norm) Eine *Norm* auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ die folgende Axiome erfüllt:

(N1) Für alle $v \in V$ ist $\|v\| \geq 0$ und es ist $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

(N2) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$ gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

(N3) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (*Dreiecksungleichung*).

Aufgabe 7 Sei V ein normierter Vektorraum. Für alle $a, b, c \in V$ gilt dann $\|a - b\| \leq \|a - c\| + \|c - b\|$.

Aufgabe 8 Versehe die Vektorräume aus Aufgabe 6 mit geeigneten Normen.

Aufgabe 9 Betrachte verschiedene Normen auf $\mathbb{R}^2$. Zeichne für jede dieser Normen die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

Aufgabe 10 Zeige, daß auf $\mathbf{C}[a,b]$ durch $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$ eine Norm definiert ist.

Proposition 1.4 (Cauchy-Schwarzsche und Minkowskische Ungleichung)
Für $a, b \in \mathbb{R}^+$, a_k,$b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ gelten folgende Ungleichungen:

(a) $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

(b) $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*)

(c) $\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (*Minkowskische Ungleichung*)

Beweis: (a) Es ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} &\iff 2\sqrt{ab} \leq a+b \\
&\iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\
&\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
&\iff 0 \leq (a-b)^2.
\end{aligned}$$

(b) Es bezeichne $A = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und $B = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. OBdA sei $A, B > 0$. Setze $\alpha_k = \frac{|a_k|}{A}$ und $\beta_k = \frac{|b_k|}{B}$. Es ist dann noch zu zeigen, daß $\sum \alpha_k \beta_k \leq 1$ ist. Dies jedoch folgt sofort aus

$$\sum \alpha_k \beta_k = \sum \sqrt{\alpha_k^2 \beta_k^2} \leq \sum \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \sum \beta_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(c) OBdA sei $\sum (a_k + b_k)^2 > 0$. Dann ist

$$\sum (a_k + b_k)^2 = \sum (a_k + b_k) a_k + \sum (a_k + b_k) b_k \leq \sum |a_k + b_k| \cdot |a_k| + \sum |a_k + b_k| \cdot |b_k|.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist damit

$$\sum (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sum (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Durch Division mit $(\sum (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}}$ erhält man die Behauptung. ■

2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 2.1 (Konvergenz) Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* mit *Grenzwert* v wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|v_n - v\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist. Wir schreiben dann $v_n \to v$ beziehungsweise $\lim v_n = v$.

Proposition 2.2 Grenzwerte von Folgen in normierten Vektorräumen sind eindeutig.

Beweis: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V, $v_n \to v$ und $v_n \to w$. Dann ist $\|v - w\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - w\| \to 0$ für $n \to \infty$ und deshalb $v = w$. ■

Definition 2.3 (punktweise Konvergenz) Sei V ein normierter Vektorraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von V nach V. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* nach $f : V \to V$, wenn $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $v \in V$ gegen $f(v)$ konvergiert.

Definition 2.4 (Stetigkeit) Seien V, W zwei normierte Vektorräume. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt *stetig*, wenn für jede Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert v auch die Folge $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und Grenzwert $f(v)$ hat.

Aufgabe 11 Was kann man über Graphen stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ aussagen?

Aufgabe 12 Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ mit $f_n(x) = x^n$. Gegen welche Funktion konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise? Ist diese Funktion stetig? Wie muß eine Funktionenfolge in $\mathbf{C}[a,b]$ konvergieren, damit auch die Grenzwertfunktion stetig ist?

Aufgabe 13 Zeige, daß jede konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ *beschränkt* ist, das heißt, daß eine reelle Zahl r existiert mit $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dies auch für beliebige Vektorräume?

Definition 2.5 (gleichmäßige Konvergenz) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $X \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert *gleichmäßig* auf X gegen f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$ stets $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ist.

Proposition 2.6 Jede gleichmäßig konvergente Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ stetiger reeller Funktionen konvergiert gegen eine stetige Funktion f.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Wir müssen zeigen, daß die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_m) ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f_{m_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Da f_{m_0} stetig ist existiert außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß $|f_{m_0}(a_n) - f_{m_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$ ist. Daraus folgt nun für alle $n \geq n_0$

$$|f(a_n) - f(a)| \leq |f(a_n) - f_{m_0}(a_n)| + |f_{m_0}(a_n) - f_{m_0}(a)| + |f_{m_0}(a) - f(a)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

Proposition 2.7 Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Beweis: Wir nennen m eine *Gipfelstelle* von (a_n), wenn für $n > m$ stets $a_n < a_m$ ist. Besitzt (a_n) unendlich viele Gipfelstellen $m_1, m_2, \ldots$, so ist $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Teilfolge von (a_n). Gibt es nur endlich viele Gipfelstellen, so existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, der größer als alle Gipfelstellen und somit selbst keine Gipfelstelle ist. Deshalb existiert ein $n_1 > n_0$ mit $a_{n_1} \geq a_{n_0}$. Da auch n_1 keine Gipfelstelle sein kann, muß es ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ geben. So fortfahrend erhält man eine wachsende Teilfolge. ■

Proposition 2.8 Jede monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis: OBdA sei (a_n) eine beschränkte und monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$. Sei a die kleinste obere Schranke von (a_n), das heißt die kleinste reelle Zahl, so daß $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen, daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert.

Angenommen, (a_n) konvergiere nicht gegen a. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n_1 > n_0$ existiert mit $|a - a_{n_1}| \geq \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, heißt das, daß $|a - a_n| \geq \varepsilon$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $a - \varepsilon$ eine obere Schranke von (a_n) und deshalb a nicht die kleinste obere Schranke im Widerspruch zur Wahl von a. ■

Proposition 2.9 Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit Grenzwert $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \in [a, b]$.

Beweis: Angenommen, $c \notin [a, b]$. Wir betrachten den Fall $c > b$, wobei der Beweis für $c < a$ analog ist. Sei also $c = b + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Dann ist aber $|a_n - c| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb konvergiert (a_n) nicht gegen c im Widerspruch zur Annahme. ■

Proposition 2.10 Jede Funktion $f \in \mathbf{C}[a, b]$ nimmt ein Maximum an.

Beweis: Sei $f \in \mathbf{C}[a, b]$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $f(x)$ ist unbeschränkt auf $[a, b]$. Dann existiert eine Folge (a_n) in $[a, b]$, so daß die Folge $(f(a_n))$ monoton wachsend und unbeschränkt ist. Aus Proposition 2.7 folgt nun, daß (a_n) eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, welche nach Proposition 2.8 konvergiert, sagen wir gegen c. Nach Proposition 2.9 ist $c \in [a, b]$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist nun die Folge $f(a_{n_k})$ konvergent mit Grenzwert $f(c)$. Nach Aufgabe 13 ist daher die Folge $f(a_{n_k})$ beschränkt im Widerspruch zur Annahme.

(2) $f(x)$ ist beschränkt auf $[a, b]$. Dann existiert eine Folge (a_n) in $[a, b]$, so daß die Folge $(f(a_n))$ monoton wachsend ist und gegen $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ konvergiert. Mit derselben Argumentation wie unter (1) existiert eine monotone Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit Grenzwert $c \in [a, b]$. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt $f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. ■

Aufgabe 14 Definiere ausgehend von Proposition 2.10 eine Norm, die *Maximumsnorm* auf $\mathbf{C}[a, b]$ und zeige: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{C}[a, b]$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen ein $f \in \mathbf{C}[a, b]$, wenn sie bezüglich der Maximumsnorm gegen f konvergiert.

Aufgabe 15 Ist es möglich, Konvergenz von Folgen zu definieren, ohne dabei den Grenzwert der jeweiligen Folge zu verwenden?

3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Definition 3.1 (Cauchyfolge) Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum V heißt eine *Cauchyfolge* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ stets $\|v_m - v_n\| < \varepsilon$ ist.

Proposition 3.2 Jede konvergente Folge in einem normierten Vektorraum V ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge in V mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ ist dann $\|a_n - a_m\| \leq \|a_n - a\| + \|a - a_m\| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Definition 3.3 (Vollständigkeit) Ein normierter Vektorraum V heißt *vollständig,* oder ein *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge in V konvergiert.

Aufgabe 16 Ist $\mathbb{Q}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ vollständig?

Aufgabe 17 Betrachte $\mathbf{C}[a, b]$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ aus Aufgabe 10. Ist dieser Raum vollständig?

Proposition 3.4 Der Raum $\mathbf{C}[a, b]$ ist ein Banachraum bezüglich der Maximumsnorm.

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathbf{C}[a, b]$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in [a, b]$ stets $(*)$ $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ist. Für jedes $x \in [a, b]$ ist daher $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $f(x) \in \mathbb{R}$. Durch Grenzwertbetrachtung $m \to \infty$ in $(*)$ erhält man $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und alle $n \geq n_0$. Deshalb konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen die Funktion f. Nach Proposition 2.6 ist f stetig. ■

4 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 4.1 (Kontraktion) Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* λ, $0 \leq \lambda < 1$, wenn $\|f(v) - f(w)\| \leq \lambda\|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ ist.

Aufgabe 18 Betrachte Funktionen auf $\mathbb{R}$. Was für Eigenschaften haben Kontraktionen?

Aufgabe 19 Wir definieren rekursiv für alle $x \in V$: $f^0(x) = x$ und $f^{n+1}(x) := f(f(x))$. Zeige durch vollständige Indukion:

(a) Für jede kontrahierende Abbildung $f : V \to V$ und alle $x, y \in V$ gilt $\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq \lambda^n\|x - y\|$.

(b) Für alle $x \in V$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\|x - f^n(x)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f^i(x) - f^{i+1}(x)\|$.

Aufgabe 20 Zeige durch vollständige Induktion, daß für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ist.

Proposition 4.2 Jede kontrahierende Abbildung ist stetig.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus der Beobachtung, daß für jede konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a stets $\|f(a_n) - f(a)\| < \|a_n - a\|$ gilt. ∎

Satz 4.3 (Banachscher Fixpunktsatz) Eine kontrahierende Abbildung f eines Banachraumes V in sich besitzt genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $v \in V$ mit $f(v) = V$.

Die Grundidee des Beweises ist, daß man einen beliebigen Punkt y mit f abbildet und den Bildpunkt wieder mit f abbildet und so weiter. Die Folge der Bildpunkte ist dann eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist Fixpunkt von f, und zwar der einzige.

Beweis: Sei $x \in V$ beliebig gewählt.

(1) $(f^n(x))$ ist eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert v. Seien dazu $m, n \in \mathbb{N}$ und oBdA $k \in \mathbb{N}$ mit $k = m - n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|f^n(x) - f^m(y) &= \|f^n(x), f^{n+k}(x)\| \\
&= \|f^n(x), f^n(f^k(x))\| \\
&\leq \lambda^n \|x, f^k(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (a))} \\
&\leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \|f^i(x) - f^{i+1}(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (b))} \\
&= \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \|x - f(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (a))} \\
&= \lambda^n \|x - f(x)\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \\
&= \frac{\lambda^n(1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} \|x - f(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 20)} \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x - f(x)\|.
\end{aligned}$$

Dies aber konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$, woraus die Behauptung folgt.

(2) Es ist $f(v) = v$. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von f wegen

$$f(v) = f(\lim f^n(x)) = \lim f^{n+1}(x) = v.$$

(3) v ist der einzige Fixpunkt von f. Zum Beweis nehme man an, daß w ein weiterer Fixpunkt von f sei. Dann ist aber $\|v - w\| = \|f(v) - f(w)\| \leq \lambda\|v - w\| < \|v - w\|$ und deshalb $v = w$. ■

Literatur

[Bro92] Th. Bröcker, *Analysis II.* BI, Mannheim, 1992.

[BS81] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel.* Teubner, Leipzig, 1981.

[Heu92] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 1 und 2.* Teubner, Stuttgart, ^{7}1992.

Pascal Hitzler
E-Mail: `pascal.hitzler@student.uni-tuebingen.de`
Homepage: `http://ogham.ucc.ie/~pascal`