Sur les programmes logiques localement stratifiés[1]

Anthony Karel Seda & Pascal Hitzler

Résumé – Des idées élémentaires de topologie dynamique sont utilisées pour une approche constructive de la sémantique des modèles parfaits de Przymusinski pour programmes localement stratifiés. Nos résultats comportent des applications de niveau qui prennent valeurs dans un ordinal dénombrable arbitraire et nos méthodes sont apparentées à celles d'Apt, Blair et Walker pour les programmes stratifiés. Nous montrons l'existence de modèles supportés uniques quand certaines inégalités sont strictes, améliorant ainsi les résultats de Przymusinski pour les modèles parfaits. Fitting a utilisé des métriques pour étudier certains programmes non-stratifiés qui apparaissent dans les problèmes de terminaison; nos résultats complètent sa méthode.

On Locally Stratified Logic Programs

Abstract – Elementary ideas from topological dynamics are used to provide a constructive approach to Przymusinski's perfect model semantics for locally stratified normal logic programs. Our results utilise level mappings which take values in an arbitrary countable ordinal, and our methods are akin to those of Apt, Blair and Walker for stratified programs. We show the existence of unique supported models when certain inequalities are strict, improving Przymusinski's results for perfect models. Also, our results complement Fitting's treatment by metric methods of certain non-stratified programs which occur in the context of termination problems in logic programming.

Version française abrégée – Soit P un programme logique normal au sens défini dans [4]. Nous considérons P comme un ensemble (peut-être infini) des clauses C du type $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1}$, dans lequel A, tout A_i et tout B_j ne contiennent pas de variables. Le problème principal dans l'étude de tels programmes est d'établir un rapport entre la sémantique déclarative de P et la sémantique procédurale de P. Autrement dit, de rattacher la théorie des modèles de P d'une part, aux interprètes de P d'autre part et, pour ces derniers, d'étudier les problèmes tels que véridicité et complétude. Dans la plupart des cas nous associerons un opérateur $T_P : I_P \rightarrow I_P$ à P, I_P désignant le treillis de toutes les interprétations de Herbrand pour P et nous étudierons les points préfixés de T_P, c'est-à-dire les modèles de P (voir [4]), et les points fixes de T_P, à savoir les modèles supportés de P (voir [1]). Comme T_P est en général non-monotonique quand des atomes négatifs, $\neg B_j$, sont présents dans le corps des clauses de P, il est très important de trouver des points fixes d'opérateurs non-monotoniques ou, du moins, de démontrer leur existence. Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter ce problème, entre autres (i) utiliser des logiques a trois valeurs; (ii) considérer I_P comme un espace métrique ou quasi-métrique; (iii) considérer I_P comme un espace topologique, voir [11] pour plus amples détails et références. C'est cette dernière méthode qui sera utilisée ici. En particulier, nous identifions I_P à l'ensemble $\mathcal{P}(B_P)$ de tous les sous-ensembles de B_P comme d'habitude, B_P désignant la base de Herbrand pour P. Ce qui nous permet d'identifier I_P à l'espace des fonctions, autrement dit l'espace des suites $\mathbf{2}^{B_P}$, dans lequel $\mathbf{2}$ désigne l'espace à deux points $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète. Désignons maintenant par Q la topologie sur I_P résultant de la topologie produit sur $\mathbf{2}^{B_P}$. Cette topologie est bien connue et, dans cette topologie, I_P est homéomorphique à l'ensemble de Cantor des nombres réels (nous supposons ici que le langage de premier ordre sous-jacent de P contient au moins un symbole fonction tel que B_P soit un ensemble infini); nous dirons donc que Q est la topologie de Cantor sur I_P.

Bien entendu, l'identification de I_P à un produit dénombrable d'espaces à deux points entraîne une identification correspondante de T_P à un opérateur S_P défini sur l'espace de suites correspondant. Ce raisonnement conduit naturellement à considérer l'étude de T_P et de ses points fixes du point de vue des systèmes dynamiques et c'est cette approche que nous examinons dans cette note. En fait, dans [11], nous avons établi des rapports entre d'une part la logique computationelle et d'autre part l'espace de Vietoris de B_P, aussi bien que les systèmes de fonctions itérées. Notre but dans cette note est plus particulièrement de présenter un résumé des résultats obtenus dans [11] avec l'étude de la convergence dans Q des suites $T_P^n(I)$ des itérates d'un élément quelconque $I \in I_P$, c'est-à-dire les éléments de l'orbite de I, et notre raisonnement est guidé par la proposition suivante.

Proposition 1 *(Voir [11]) Soient P un programme logique normal et I une interprétation de P. Si la suite $(T_P^n(I))_{n\in N}$ converge dans la topologie Q de Cantor vers une interprétation M quelconque (il n'est*

[1] To appear in C.R. Acad. Sc. Paris, 1998.

pas nécessaire que cette condition soit remplie), alors M est un modèle de P mais pas nécessairement un modèle supporté. Si, de plus, T_P est continu dans la topologie de Cantor (il n'est pas nécessaire que cette condition soit remplie), alors M est un modèle supporté ou point fixe de T_P.

Ainsi donc nous cherchons les conditions syntactiques qui assurerons la convergence dans Q des suites $(T_P^n(I))$ et permettront de trouver des modèles et des modèles supportés de P au moyen de la Proposition 1. En fait, nous étudions deux conditions, Condition (1) et (2) imposées sur un programme P que nous formulons en termes d'applications $l : B_P \to \gamma$, appelées (γ)-applications de niveau, γ désignant un ordinal dénombrable arbitraire. Ces conditions sont les suivantes: soient P un programme et $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1}$ une clause arbitraire de P; on dit que P satisfait la Condition (1) si on a $l(A) \geq l(A_i)$ et $l(A) > l(B_j)$ pour tout i et j et qu'il satisfait la Condition (2) si on a $l(A) > l(A_i), l(B_j)$ pour tout i et j. En fait, la classe de programmes qui remplit la Condition (1) coïncide exactement avec la classe des programmes localement stratifiés définie par Przymusinski dans [7]; la sous-classe de programmes qui remplit la Condition (2) pourrait être appelée la classe des programmes acycliques généralisés. A vrai dire, nous avons l'intention de distinguer soigneusement entre ces deux classes mais le terme "localement stratifié" ne nous permet pas de le faire. Nous utiliserons par conséquent les termes anglais *semi-strictly level-decreasing* et *strictly level-decreasing*, respectivement, pour bien les différencier.

Przymusinski dans [8] et ailleurs a étudié la sémantique procédurale des programmes localement stratifiés. Dans cette note, toutefois, nous nous limitons à leur théorie des modèles et nos résultats peuvent se résumer de la façon suivante: avec la Proposition 1 nous donnons, au §2, une approche simple et constructive (voir Construction 1) de la sémantique des modèles parfaits pour les programmes localement stratifiés P (voir Théorème 1). De plus, nous obtenons des équations de récursion qui contrôlent l'évolution des itérates liés à la construction et qui maîtrisent la négation (voir Corollaire 1). En particulier, les équations de récursion démontrent la simplicité de notre construction si P remplit la Condition (2). On notera que nous n'utilisons que les itérates ordinaires de T_P et non les plus compliquées introduites dans [1].

Au §3, enfin, nous étudions la classe de programmes qui remplit la Condition (2). Nous montrons que dans ce cas le modèle parfait unique construit au §2 est en fait le modèle supporté unique, voir Théorème 3. Pour cette classe de programmes le résultat de Przymusinski se trouve amélioré et toutes les sémantiques standards coïncident. Ce résultat est obtenu en munissant le domaine de Scott I_P de la structure d'un espace ultramétrique généralisé selon la définition de [5, 6]. Nous montrons ensuite que T_P est strictement contractante par rapport à l'ultramétrique généralisée que nous définissons. Enfin, nous appliquons le théorème de Priess-Crampe et Ribenboim sur les points fixes [5, 6] pour obtenir un point fixe unique de l'opérateur T_P et par conséquent un modèle supporté unique pour P.

Les auteurs de cette note se sont donné pour tâche d'approfondir ces idées et, en particulier, de les développer dans la programmation logique disjonctive et dans d'autres domaines.

1 Introduction

Throughout this note, P will denote a normal logic program in the sense of [4]; thus P consists of finitely many clauses of the form $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1}$. We let B_P denote the Herbrand base for P, and we let I_P denote the power set $\mathcal{P}(B_P)$ of B_P or, in other words, the set of all Herbrand interpretations for P. We suppose here that the underlying first order language of P contains at least one function symbol. Recall that models M for P correspond to pre-fixed points of the immediate consequence operator T_P i.e. to interpretations M satisfying $T_P(M) \subseteq M$, see [4], and supported models for P correspond to fixed points of T_P, see [1]. Since I_P has been identified with $\mathbf{2}^{B_P}$ in a natural way, where $\mathbf{2}$ denotes the set $\{0, 1\}$, it can be endowed with the product topology obtained from the discrete topologies on the factor spaces $\mathbf{2}$. This results in the Cantor topology Q on I_P in which I_P is homeomorphic to the Cantor set of real numbers.

Proposition 1 *(See [11]) Suppose P is a normal logic program and I is an interpretation for P. If the sequence $(T_P^n(I))_{n\in N}$ of iterates of I converges in the Cantor topology Q to some M (it need not so converge), then M is a model for P but not necessarily a supported model. If, further, T_P is continuous in the Cantor topology (it need not be), then M is a supported model or fixed point of T_P.*

The purpose of this note is to present a summary of the results obtained in [11] in investigating the rôle of Proposition 1 in the model theory of P. Thus, we consider syntactic conditions which will ensure convergence in Q of sequences $(T_P^n(I))_{n\in N}$ of iterates, and thereby enable one to find models and supported models for P by means of Proposition 1. Indeed, the conditions we want will be formulated in terms of mappings $l : B_P \to \gamma$, called (γ)-*level mappings*, where γ denotes an arbitrary countable ordinal.

We let $\mathcal{L}_n = \{A \in B_P; l(A) < n\}$, for $n \leq \gamma$, and put $\mathcal{L}_0 = \phi$. If $A \in B_P$ and $l(A) = n$, we say that *the level of A is n*. Without loss of generality, we suppose always that the smallest value taken by l is zero.

Definition 1 Let $l : B_P \to \gamma$ denote a level mapping for P. We call P:
(1) *Semi-strictly level-decreasing (with respect to l)* if the inequalities $l(A) \geq l(A_i)$ and $l(A) > l(B_j)$ hold for all i and j in each ground instance $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1}$ of every clause in P.
(2) *Strictly level-decreasing (with respect to l)* if the inequalities $l(A) > l(A_i), l(B_j)$ hold for all i and j in each ground instance $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1}$ of every clause in P.

In fact, semi-strictly level-decreasing programs coincide exactly with the locally stratified programs defined by Przymusinski in [7] and elsewhere, see [8] for example. Indeed, if $l : B_P \to \gamma$ is a level mapping and we set $H_n = l^{-1}(n)$ for each ordinal $n < \gamma$, then in this way we set up a one-to-one correspondence between level mappings l and local stratifications $\{H_n; n < \gamma\}$. However, the terminology we adopt is more suited to our purposes since it distinguishes between the conditions (1) and (2), and the term "locally stratified" fails to do this. Przymusinski in [8] discussed the existence of suitable interpreters for locally stratified programs and related them to model theory. In this note, therefore, we confine ourselves to the declarative semantics of P.

2 Semi-Strictly Level-Decreasing Logic Programs

In this section, we consider the perfect model semantics of locally-stratified programs as defined by Przymusinski in [7]. What is new here is that our approach is very simple and constructive, see Construction 1, and our methods are rather different from those employed in [7], being closer in spirit to [1]. Moreover, we establish recursion equations, see Corollary 1, which show very precisely how the iterates involved in the construction evolve. Finally, we note that another simplification we obtain is that we work only with the ordinary iterates of T_P rather than with more complicated concepts such as the *powers* introduced in [1].

Definition 2 Let P denote a normal logic program and let $l : B_P \to \gamma$ denote a level mapping, where $\gamma \geq 1$. For each n satisfying $0 < n \leq \gamma$, let $P_{[n]}$ denote the set of all ground instances of clauses in P in which only atoms A with $l(A) < n$ occur. We define $T_{[n]} : \mathcal{P}(\mathcal{L}_n) \to \mathcal{P}(\mathcal{L}_n)$ by $T_{[n]}(I) = T_{P_{[n]}}(I)$.

Construction 1 Let P be a semi-strictly level-decreasing normal logic program and let $l : B_P \to \gamma$ denote a level mapping, where $\gamma \geq 1$. We construct the transfinite sequence $(I_n)_{n\in\gamma}$ inductively as follows. For each $m \in N$, we put $I_{[1,m]} = T_{[1]}^m(\phi)$ and set $I_1 = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{[1,m]}$. If $n \in \gamma$, where $n > 1$, is a successor ordinal, then for each $m \in N$ we put $I_{[n,m]} = T_{[n]}^m(I_{n-1})$ and set $I_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{[n,m]}$. If $n \in \gamma$ is a limit ordinal, we put $I_n = \bigcup_{m<n} I_m$. Finally, we put $I_{[P]} = \bigcup_{n<\gamma} I_n$.

Lemma 1 *Let P be a normal logic program which is semi-strictly level-decreasing with respect to the level mapping $l : B_P \to \gamma$, where $\gamma \geq 1$. Then the following statements hold.*
(a) The sequence $(I_n)_{n\in\gamma}$ is monotonic increasing in n.
(b) For every successor ordinal $n \in \gamma$ the sequence $(I_{[n,m]})$ is monotonic increasing in m.
(c) For every $n \in \gamma$, where $n \geq 1$, I_n is a fixed point of $T_{[n]}$.
(d) If $l(B) < n$ and $B \notin I_n$, where $B \in B_P$, then for every $m \in \gamma$ with $n < m$ we have $B \notin I_m$ and hence $B \notin I_{[P]}$. In particular, if $l(B) < n$ and $B \notin I_{[n+1,m]}$ for some $m \in N$, then $B \notin I_n$ and hence $B \notin I_{[P]}$.

Corollary 1 *Suppose the hypotheses of Lemma 1 all hold. Then:*
(1) For all ordinals n and all $m \in N$ we have the recursion equations

$$I_{[n+1,0]} = I_n$$

$$I_{[n+1,m+1]} = I_n \cup T_{P(n)}(I_{[n+1,m]}),$$

where $P(n)$ denotes the set consisting of all those ground instances of clauses in P whose head has level n.
(2) If P is in fact strictly level-decreasing, then for every ordinal $n \geq 1$ we have $I_{[n+1,m]} = I_n \cup T_{P(n)}(I_n)$ for all $m \in N$, and therefore the iterates stabilize after one step.

Theorem 1 *Suppose that P is a normal logic program which is semi-strictly level-decreasing with respect to the level mapping $l : B_P \to \gamma$. Then*
(a) $I_{[P]}$ is a minimal supported model for P.
(b) $I_{[P]}$ is a perfect model for P and indeed is the only perfect model for P.

It is shown in [7] that perfect models are independent of the local stratification, we therefore have the following result.

Corollary 2 *If P is a normal logic program which is semi-strictly level-decreasing with respect to two level mappings l_1 and l_2, then the corresponding models $I_{[P_1]}$ and $I_{[P_2]}$ are equal.*

It also follows from [7, Theorem 4] and Theorem 1 above that $I_{[P]}$ coincides with the model M_P of [1] when P is stratified. A proof of this fact based on the methods discussed here can be found in [11].

Example 1 Consider the following program P:

$$q(o) \leftarrow$$

$$q(s^2(x)) \leftarrow q(x)$$

$$p(x) \leftarrow \neg q(x)$$

$$p(s^2(x)) \leftarrow \neg p(x)$$

$$p(x) \leftarrow p(x)$$

This program is not stratified but it is semi-strictly level-decreasing with respect to the level mapping l in which $l(q(s^n(o))) = 0$ and $l(p(s^n(o))) = n + 1$ for all n. In fact, I_0 is the set $\{q(s^{2n}(o)); n \in N\}$. Part 2 of Corollary 1 applies to the sub-program of P consisting of the third and fourth clauses of P. This observation simplifies the computation of $I_{[P]}$ which in fact is the set $I_0 \cup \{p(s^n(o)); n \in N, n \text{ not a multiple of } 4\}$.

3 Strictly Level-Decreasing Logic Programs

If P is in fact strictly level-decreasing, we can sharpen the results of the previous section by showing uniqueness of supported models, not just uniqueness of perfect models. These results are established by means of a fixed-point theorem of Priess-Crampe and Ribenboim.

Let X be a set and let Γ be a partially ordered set with least element 0. Following [5, 6], we call the pair (X, d) a *generalized ultrametric space* if $d : X \times X \to \Gamma$ is a function satisfying the following conditions for all $x, y, z \in X$ and $\gamma \in \Gamma$: (1) $d(x, y) = 0$ if and only if $x = y$; (2) $d(x, y) = d(y, x)$; (3) if $d(x, y) \leq \gamma$ and $d(y, z) \leq \gamma$, then $d(x, z) \leq \gamma$. For $0 \neq \gamma \in \Gamma$ and $x \in X$, the set $B_\gamma(x) = \{y \in X; d(x, y) \leq \gamma\}$ is called a *γ-ball* or just a *ball* in X. A generalized ultrametric space is called *spherically complete* if, for any chain $(\mathcal{C}, \subseteq)$ of balls in X, $\bigcap \mathcal{C} \neq \phi$. A function $f : X \to X$ is called *strictly contracting* if $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ for all $x, y \in X$ with $x \neq y$. Finally, the main result we need from [5, 6] is as follows: If (X, d) is a spherically complete generalized ultrametric space and $f : X \to X$ is strictly contracting, then f has a unique fixed point.

Let D denote a Scott domain, in the sense of [12], with set D_C of compact elements. For a countable ordinal γ, let Γ_γ be the set $\{2^{-\alpha}; \alpha < \gamma\}$ of symbols $2^{-\alpha}$ with ordering $2^{-\alpha} < 2^{-\beta}$ if and only if $\beta < \alpha$.

Definition 3 Let $r : D_C \to \gamma$ be a function, called a *rank function*, and denote $2^{-\gamma}$ by 0. Define $d_r : D \times D \to \Gamma_{\gamma+1}$ by

$$d_r(x, y) = \inf\{2^{-\alpha}; c \leq x \text{ if and only if } c \leq y \text{ for every } c \in D_C \text{ with } r(c) < \alpha\}.$$

Then (D, d_r) is called the generalized ultrametric space *induced by r*.

Theorem 2 *(See [11]) (D, d_r) is a spherically complete generalized ultrametric space.*

To apply these results to logic programming we regard I_P as a domain whose set of compact elements is the set I_C of all finite subsets of B_P, see [10] for related results. We note also that in the special case of the domain I_P, results similar to Theorem 2 were obtained in [6].

Definition 4 Let P be a normal logic program and let $l : B_P \to \gamma$ be a level mapping. We define the rank function r_l *induced* by l by setting $r_l(I) = \max\{l(A); A \in I\}$ for every $I \in I_C$. The generalized ultrametric obtained from a rank function in this way will be denoted by d_l.

Theorem 3 *(See [11]) Let P be a normal logic program which is strictly level-decreasing with respect to a level mapping $l : B_P \to \gamma$. Then T_P is strictly contracting with respect to the generalized ultrametric d_l induced by l. Therefore, T_P has a unique fixed point and hence P has a unique supported model.*

Corollary 3 *Suppose that P is strictly level-decreasing with respect to an arbitrary level mapping $l : B_P \to \gamma$. Then all standard semantics for P coincide with the perfect model semantics of [7] which is the unique (minimal) supported model for P.* ■

In case that l is an ω-level mapping, the proof of Theorem 3, see [11], can be given in exactly the same form with respect to the ultrametric d introduced by Fitting in [2]. In this case, the Banach contraction mapping theorem is sufficient to obtain the fixed point which results, see [11, Theorem 5].

Example 2 Take P to be the following program:

$$p(o,o) \leftarrow$$
$$p(s(y),o) \leftarrow \neg p(y,x), \neg p(y,s(x))$$
$$p(y,s(x)) \leftarrow \neg p(y,x)$$

and define $l : B_P \to \omega\omega$ by $l(p(s^k(o), s^j(o))) = \omega k + j$, where ωk denotes the k^{th} limit ordinal. Then P is strictly level-decreasing and its unique supported model, given by Theorem 3, is the set $\{p(o, s^{2n}(o)); n \in N\} \cup \{p(s^{n+1}(o), s^{2k+1}(o)); k, n \in N\}$.

References

[1] K.R. Apt, H.A. Blair and A. Walker, Towards a Theory of Declarative Knowledge. In: Jack Minker (Ed.), Foundations of Deductive Databases and Logic Programming. Morgan Kaufmann Publishers Inc., Los Altos, 1988, pp. 89-148.

[2] M. Fitting, Metric Methods: Three Examples and a Theorem, *J. Logic Programming* **21** (3) (1994), 113-127.

[3] P. Hitzler, Topology and Logic Programming Semantics, Diplomarbeit in Mathematik, Universität Tübingen, 1998.

[4] J.W. Lloyd, Foundations of Logic Programming. Springer-Verlag, 2nd Edition, Berlin, 1988.

[5] S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, Fixed Points, Combs and Generalized Power Series, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **63** (1993), 227-244.

[6] S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, Ultrametric Spaces and Logic Programming. Preprint, October 1997.

[7] T. Przymusinski, On the Declarative Semantics of Deductive Databases and Logic Programs. In: Jack Minker (Ed.), Foundations of Deductive Databases and Logic Programming. Morgan Kaufmann Publishers Inc., Los Altos, 1988, pp. 193-216.

[8] T. Przymusinski, Well-Founded and Stationary Models of Logic Programs, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **12** (1994), 141-187.

[9] A.K. Seda, Topology and the Semantics of Logic Programs, *Fundamenta Informaticae* **24** (4) (1995), 359-386.

[10] A.K. Seda, Quasi-metrics and the Semantics of Logic Programs, *Fundamenta Informaticae* **29** (1) (1997), 97-117.

[11] A.K. Seda and P. Hitzler, Topology and Iterates in Computational Logic, Department of Mathematics, University College, Cork, November 1997.

[12] V. Stoltenberg-Hanson, I. Lindström and E.R. Griffor, Mathematical Theory of Domains. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science No. 22, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Department of Mathematics, University College, Cork, Ireland. E-mail: aks@bureau.ucc.ie
Mathematische Fakultät, Universität Tübingen, Germany. E-mail: zxmip06@student.uni-tuebingen.de